

## Olimpiada de matematică Etapa locală - 10 februarie 2023

### Clasa a VII-a

1.

2p i) Arătați că  $(n+1)\sqrt{n} > n\sqrt{n+1}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

2p ii) Verificați că  $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

3p iii) Să se arate că  $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2023\sqrt{2022}+2022\sqrt{2023}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2023}}$ .

2.

2p i) Să se arate că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  și  $y \in \mathbb{Z}$  avem  $[x+y]=[x]+y$ .

2p ii) Să se rezolve ecuația  $\left[x - \frac{3}{2}\right] + \left[x + \frac{3}{2}\right] = x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

3p iii) Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel ca  $[x+y]=[x]+y$ . Arătați că  $y \in \mathbb{Z}$ . ( $[b]$  este partea întreagă a lui  $b \in \mathbb{R}$ )

3. Fie ABC un triunghi echilateral, M un punct pe arcul mic  $\widehat{BC}$  al cercului circumscris triunghiului, iar N punctul pe semidreapta (CM care verifică  $M \in [CN]$  și  $MN=MB$ .

3p i) Arătați că unghiul  $\widehat{BMN} = 60^\circ$ .

4p ii) Demonstrați că  $AM=BM+CM$ .

4. Fie ABCD un dreptunghi, E un punct pe BC, F un punct pe DC astfel ca (AE bisectoarea  $\widehat{BAF}$

5p i) Arătați că dacă ABCD este pătrat, atunci  $AF=BE+DF$

2p ii) Demonstrați că dacă  $AF=BE+CF$ , atunci ABCD este pătrat.

Gazeta Matematică nr. 12/2022, enunț modificat

### NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Punctajul minim de calificare la etapa județeană este de 11,5 puncte;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.